

TENTAMEN

|  |  |
| --- | --- |
| Kursnummer: | HF0024  Matematik för basår II |
| Moment: | TENB |
| Program: | Tekniskt basår |
| Rättande lärare: | Erik Melander, Maria Shamoun & Jonas Stenholm |
| Examinator: | Niclas Hjelm |
| Datum:  Tid: | 2020-05-27  08:00-12:00 |
| Hjälpmedel: | Formelsamling: Björk m fl ”Formler och tabeller” **utan anteckningar**, passare, gradskiva, penna, radergummi och linjal  **Miniräknare är ej tillåten!** |
| Omfattning och betygsgränser: | |  |  | | --- | --- | | **Poäng** | **Betyg** | | 11 | Fx | | 12 – 14 | E | | 15 – 17 | D | | 18 – 20 | C | | 21 – 23 | B | | 24 – 26 | A |   **Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. Lösningarna skall vara tydliga och lätta att följa. Införda beteckningar skall definieras. Uppställda samband skall motiveras.**  **Skriv helst med blyertspenna!**  Svaret ska framgå tydligt och vara förenklat så långt som möjligt. Svara med enhet och lämplig avrundning på tillämpade uppgifter. Svara exakt på övriga uppgifter, om inte annat anges. |

1. I en aritmetisk talföljd  är och . Bestäm . (1p)

2. Lös följande ekvation, där  är ett komplext tal:  (2p)

3. Lös följande differentialekvation , med villkoret . (2p)

4. Ett område begränsas av linjerna x = 2 och x = 5, x-axeln, och kurvan . Detta område roterar runt x-axeln. Bestäm rotationskroppens volym. (2p)

5. Beräkna om . Svara på polär form med argumentet i intervallet . (2p)

6. Nukliden X sönderfaller med en sönderfallskonstant λ = 2,00% per år, d.v.s. antalet atomer av nukliden X minskar momentant i en takt av 2,00% per år av det aktuella antalet atomer.

a) Ställ upp och lös en differentialekvation för detta sönderfall. (1p)

b) Efter hur lång tid är antalet atomer av denna nuklid st, om det varst från början? (1p)

7. a) Bestäm ekvationen för tangenten tilli den punkt på kurvan där x=2. (1p)

b) Bestäm med hjälp av denna tangent ett approximativt värde på . (1p)

8. En cirkulär vågfront rör sig utåt med hastigheten 2 dm/s. Hur snabbt ökar den av vågfronten inneslutna arean, då arean är 64 dm2? Svara exakt! (2p)

9. Lös följande polynomekvation, om man vet att en lösning är :  (3p)

10. Lös följande differentialekvation:  (2p)

11. De båda reella talen  och  antas vara icke-negativa ( och ). Antag vidare att deras summa  har ett givet konstant värde. Bestäm största och minsta värde för talens kvadratsumma, . (3p)

12. Låt  och . Den positiva talföljden  definieras sedan av att



Bestäm . (3p)

**Lösningsförslag**

1. En aritmetisk talföljd kan skrivas . Det ger oss



Vi kan nu beräkna  ur



**Svar:** 

2. Låt  (där  och  är reella tal):

 Multiplicera båda led med 2.



 Realdelar lika och imaginärdelar lika ger:

****

**Svar: **

3. 

Inhomogen ekvation av 1:a ordningen.

y**h**: Motsvarande homogena ekvation  har lösningen 

yp: Ansats: , 

 

Allmän lösning är 

Villkoret () tillämpas: 

Sökt partikulärlösning är 

**Svar:**  

4. Skivmetoden vid rotation runt x-axeln: 

Principskiss av rotationskroppen:





**Svar:** Rotationskroppens volym är 

5. Talet  skrivs på polär form:

 



… där argumentet har minskats med 2π för att komma i rätt intervall.

**Svar:** 

6. a) Differentialekvation: ,

Där är antalet atomer vid tidpunkten t år efter start (t=0).

 ger lösningen 

b) Antag att antalet atomer är  vid tiden t1.



**Svar:** a) .

b) Efter 50,0 år.

7. , 

, 

Tangentens ekvation bestäms med hjälp av enpunktsformeln:



 eller 

Approximera  med hjälp av tangentens ekvation.





**Svar:** a) Tangentens ekvation är , b) .

8. Givet:  Arean av en cirkelskiva: , arean vid tiden t0: 

då är radien vid tiden t0 : ,

Kedjeregeln ger: 



**Svar:** Den inneslutna arean ökar med 

9. Polynomets koefficienter är reella, alltså är också  en lösning.

Polynomet har en faktor:



Polynomdivision utförs:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
|  | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
|  |  |

Polynomet faktoriseras och nollproduktmetoden kan användas:





**Svar:** Polynomekvationen har fyra lösningar: .

10. Inhomogen d.e. av andra ordningen.

Homogen lösning: 

Karakteristisk ekvation är ,

med lösningar 

Två komplext konjugerade lösningar ( fallet ).



Partikulärlösning, ansats: 









Allmän lösning: 

**Svar:** 

11. Största och minsta värde för K(a,b) söks.

Villkoret  används för att eliminera ena variabeln:



 och  ger tillsammans definitionsmängden: 

Största och minsta värde kan endast finnas i ändpunkter (, ) eller stationära punkter (derivatans nollställen).

1) Ändpunkter:  

2) Stationära punkter: 



Det finns alltså en enda stationär punkt, som ligger i definitionsmängden.

(, en minpunkt.)

Vi beräknar kvadratsumman då :



**Svar:** Största värde för kvadratsumman är , då eller . Minsta värde för kvadratsumman är , då .

12.  och  ger

 (\*)

Det givna sambandet ger oss

 ⇔  ⇔  ⇔  ⇔  ⇔ 

Nu gissar man att talföljden är geometrisk med kvoten 2. Vi behöver nu bevisa att det är så.

Generellt gäller



Därför är, enligt (\*)  d v s . Vi har alltså visat att talföljden har den konstanta kvoten 2. Talföljden är en geometrisk talföljd med  och . En generell term i talföljden kan alltså skrivas 

**Svar:** 

**Rättningsmall**

**Generell rättningsmall**

1. Varje beräkningsfel -1 poäng  
   (Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)
2. Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling -2 poäng eller mer
3. Prövning istället för generell metod - samtliga poäng
4. Felaktiga antaganden/ansatser - samtliga poäng
5. Antar numeriska värden - samtliga poäng
6. Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt -1 poäng eller mer  
   (Vid flera svar väljs det minst gynnsamma. Svara antingen avrundat eller exakt, se nedan.)
7. Matematiska symboler används felaktigt/saknas -1 poäng eller mer  
   Bl.a Om ’=’ saknas (t.ex. ’=>’ används istället) -1 poäng/tenta  
   Om ’=’ används felaktigt (t.ex. istället för ’=>’) -1 poäng/tenta

Teoretiska uppgifter:

1. Avrundat svar -1 poäng/tenta

Tillämpade uppgifter:

1. Enhet saknas/fel -1 poäng/tenta
2. Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar -1 poäng/tenta
3. Svar med felaktigt antal värdesiffror ( ±1 värdesiffra ok) -1 poäng/tenta
4. Andra avrundningsfel -1 poäng/tenta
5. Exakt svar -1 poäng/tenta

**Preliminär rättningsmall**

1. ---

2.Svarar med Re z och Im z var för sig -0p

Påstår att Im z = bi -1p

3. Fel konstantbestämning -1p

Allmän lösning felaktig (förutom enkelt räknefel) -2p

4. Korrekt integral med gränser samt korrekt primitiv funktion , sedan fel +1p

5. Svarar med argument utanför intervallet  -1p

Svarar på formen  OK

Svarar på rektangulär form -1p

Påstår att  utan beräkning eller figur -1p

6. a) Svarar  -1p

b) Utgår från fel funktion -1p

*[Har man fel funktion på a) d v s något annat än  eller kan man inte få poäng på b)]*

7. ------------

8. Enhetsfel -1p

9. Korrekt uppställd polynomdivision +1p

Korrekt polynomdivision, faktoriserar polynomet och sätter  +1p

Given lösning z = 3 + i saknas i svaret -0p

10. Homogena ekvationens lösning korrekt +1p

Partikulärlösning felaktig -1p

11. Felaktig definitionsmängd/ definitionsmängd saknas -1p

Deriveringsfel -2p

Undersöker bara ena ändpunkten (då största värde söks) -1p

Undersöker bara punkter där derivatan är noll, och påvisar då inte minimum -2p

Undersöker bara punkter där derivatan är noll, och påvisar då minimum -1p

12. Bestämmer  korrekt men kommer inte vidare +1p

Beräknar  och påstår sedan att talföljden är geometrisk utan motivering -2p

Beräknar ,  (och möjligen fler a-värden) och påstår sedan att talföljden är

geometrisk utan motivering –1p

Visar att talföljdens kvot är konstant=2, med smärre formell brist -0p